Cours 12 – 17/10/2024

6. Travail; Energie; Principes de conservation

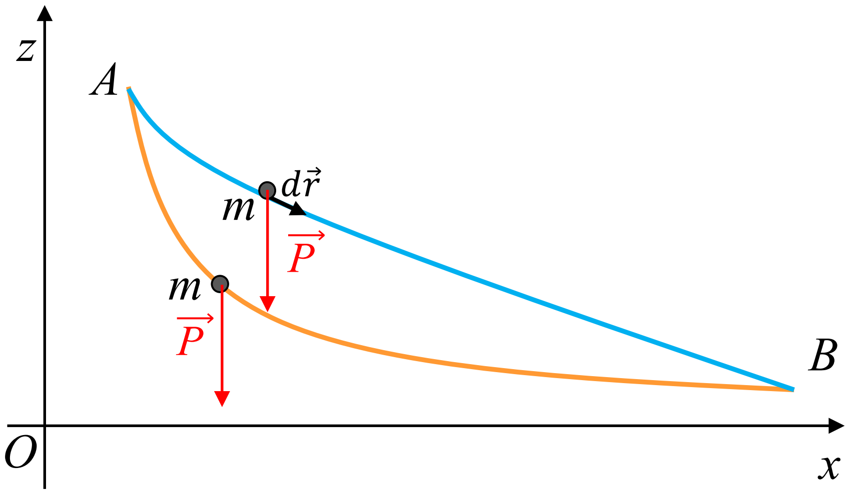
6.4. Energie potentielle

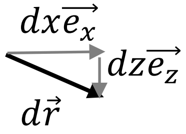
6.5. Energie mécanique

6.6. Applications de la conservation de l’énergie mécanique

6.4. Energie potentielle

■ Force conservative





Travail du poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$$

$$W_{AB} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r}$$

$$m\vec{g}.\, d\vec{r} = -mg\vec{e_z} \cdot (dx\vec{e_x} + dz\vec{e_z})$$

$$= -mgdz$$

$$W_{AB} = \int_A^B -mgdz = -mg(z_B - z_A)$$

- *Le travail **ne dépend pas** du chemin parcouru*
- *La force est dite « conservative »*

6.4. Energie potentielle

Si la force est conservative, on définit une grandeur physique, appelée « énergie potentielle » E_p qui dépend de la position de la particule, telle que

$$\boxed{W = E_{p,A} - E_{p,B}}$$

<u>Remarque</u> : contrairement à l'énergie cinétique, W correspond à la valeur de l'énergie potentielle à l'état initial moins sa valeur à l'état final.

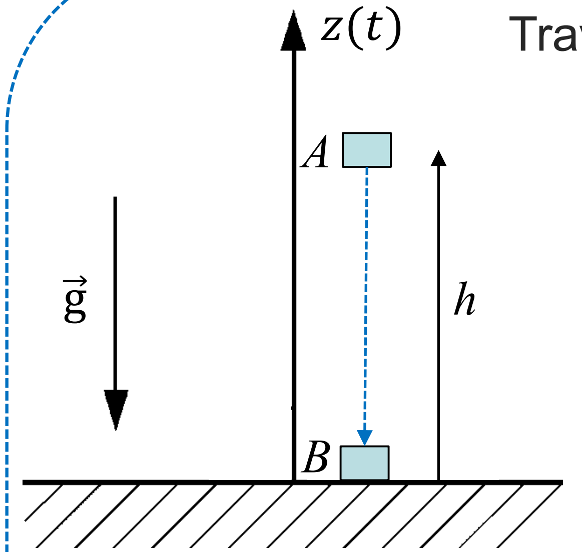
<u>Définition</u> : l'énergie potentielle E_p est une fonction de la position de la particule telle que la différence entre sa valeur prise à <u>l'état initial</u> et celle à <u>l'état final</u> est égale au travail W :

- Cette différence est indépendante du chemin parcouru ⇒ force conservative
- Elle est définie à une constante près car $W = \Delta E_p$

(on peut alors poser que la constante est nulle)

6.4. Energie potentielle

■ Exemple 1 : énergie potentielle due au champ de pesanteur terrestre



Travail du poids :

$$W = \int_h^0 m\vec{g} \cdot \overrightarrow{dz} = [-mgz]_h^0 = mgh$$

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = mg\,h$$

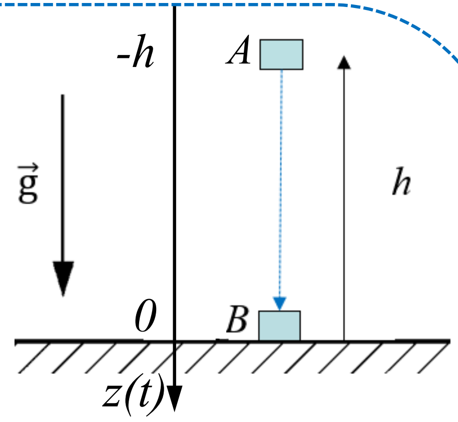
$$\begin{cases} E_{p,A} = mg\,h \\ E_{p,B} = 0 \end{cases}$$

Energie potentielle de pesanteur :

$$\boxed{E_p(z) = mg\,z + cte}$$

Travail du poids :

$$W = \int_{-h}^0 m\vec{g} \cdot \overrightarrow{dz} = [mgz]_{-h}^0 = mgh$$



Axe dans le sens opposé

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = mg\,h$$

$$\begin{cases} E_{p,A} = -\,mg\,(-h) \\ E_{p,B} = 0 \end{cases}$$

Energie potentielle de pesanteur :

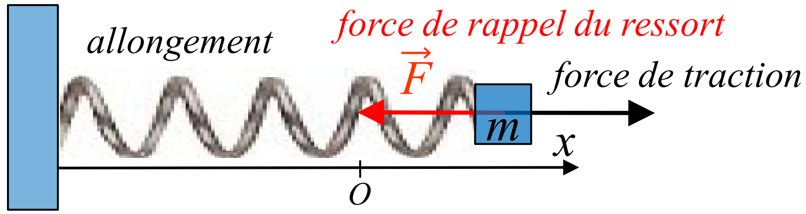
$$\boxed{E_p(z) = -mg\,z + cte}$$

⚠

Le signe de l'énergie potentielle dépend de l'axe choisi

6.4. Energie potentielle

■ Exemple 2 : énergie potentielle d'un ressort



Déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dx\,\vec{e_x}$

Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -kx\,\vec{e_x}$

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B -kx\vec{e_x}\cdot dx\,\vec{e_x} = \int_A^B -kx dx = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_A^B = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2$$

$$W = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

or par définition $W = E_{p,A} - E_{p,B} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$

et par conséquent $\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2 + cte}$

Attention : x est ici l'allongement du ressort

$x = \Delta l = l - l_0$

On peut poser cte=0 de telle sorte que l'énergie potentielle est nulle pour x=0

6.5. Energie mécanique

Nous avons vu que le travail pouvait se calculer à partir de deux expressions différentes :

$W = E_{c,B} - E_{c,A}$ *différence de l'énergie **cinétique** prise entre état **final** et état **initial***

$W = E_{p,A} - E_{p,B}$ *différence de l'énergie **potentielle** prise entre état **initial** et état **final***

soit $W = E_{c,B} - E_{c,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$

ou encore $\underbrace{E_{c,B} + E_{p,B}}_{\text{Energie mécanique en } B} = \underbrace{E_{c,A} + E_{p,A}}_{\text{Energie mécanique en } A}$

Energie mécanique : $\boxed{E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = cte}$

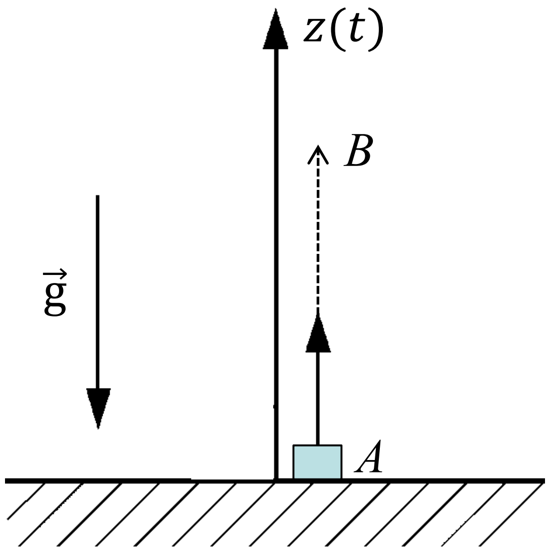
l'énergie mécanique est constante s'il n'y a pas de dissipation d'énergie (pas de force de frottement par exemple)

6.6. Application de la conservation de l'énergie mécanique

Exemple 1 : hauteur maximum pour un lancer vertical (sans frottement)

Calcul de la hauteur maximum à laquelle arrive une masse m lancée verticalement à la vitesse v_0 (on néglige les frottements de l'air)

Energie potentielle (*axe Oz vers le haut*) : $E_p(z) = mg\,z + cte$



En A : $E(A) = E_c(A) + E_p(A) = \frac{1}{2} m\,v_0^2 + 0$ (*on pose mgz +cte =0 pour z=0, soit cte =0*)

En B : $E(B) = E_c(B) + E_p(B) = 0 + mgh$

Principe de conservation : $E(A) = E(B)$

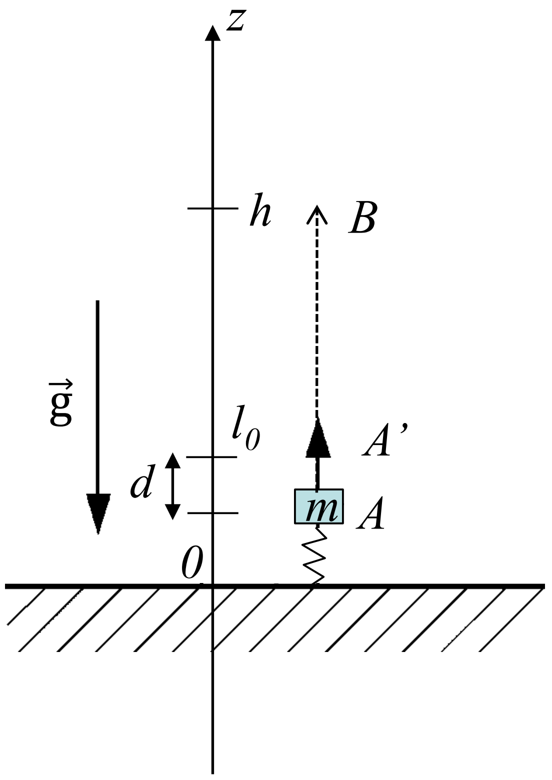
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m\,v_0^2 = mgh$$

Finalement : $\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}}$

6.6. Application de la conservation de l'énergie mécanique

■ Exemple 2 : hauteur maximum (sans frottement) avec ressort (catapulte)

Calcul de la hauteur maximum à laquelle arrive une masse m lancée verticalement par un ressort (sans masse) de longueur l_0 au repos et comprimé d'une longueur d. *La masse n'est pas attachée au ressort.*



Vitesse d'expulsion de la masse en A' :

En A : $E(A) = E_c(A) + E_p(A) = 0 + \frac{1}{2} kd^2 \quad (mgz + cte = 0 \text{ pour } z = l_0 - d)$

En A' : $E(A') = E_c(A') + E_p(A') = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgd$

avec $E(A) = E(A')$: $\frac{1}{2} m v_0^2 + mgd = \frac{1}{2} kd^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{kd^2}{m} - 2gd}$

Hauteur h en B :

En A' : $E(A') = E_c(A') + E_p(A') = \frac{1}{2} m v_0^2 + 0 \quad (mgz + cte = 0 \text{ pour } z = l_0)$

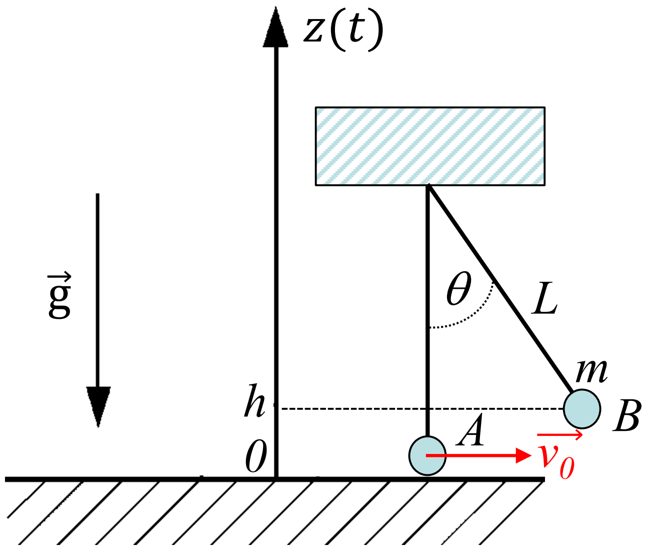
En B : $E(B) = E_c(B) + E_p(B) = 0 + mg(h - l_0)$

avec $E(A') = E(B)$: $\frac{1}{2} m v_0^2 = mg(h - l_0)$

Finalement : $\boxed{h = \frac{1}{2mg} kd^2 - d + l_0}$

Exemple 3 : pendule

Quel est l’angle maximum atteint part la masse m d’un pendule lorsqu’il est lancé de sa position verticale avec la vitesse v_0. Le fil du pendule est sans masse, inextensible et de longueur L. *On précise que l’angle atteint reste inférieur à* $\pi/2$.



En A : $E(A) = E_c(A) + E_p(A) = \frac{1}{2} m\, v_0^2 + 0$

En B : $E(B) = E_c(B) + E_p(B) = 0 + mgh$

$$\text{avec } h = L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta)$$

$$\text{avec } E(A) = E(B) : \frac{1}{2} m\, v_0^2 = mgL(1 - \cos\theta)$$

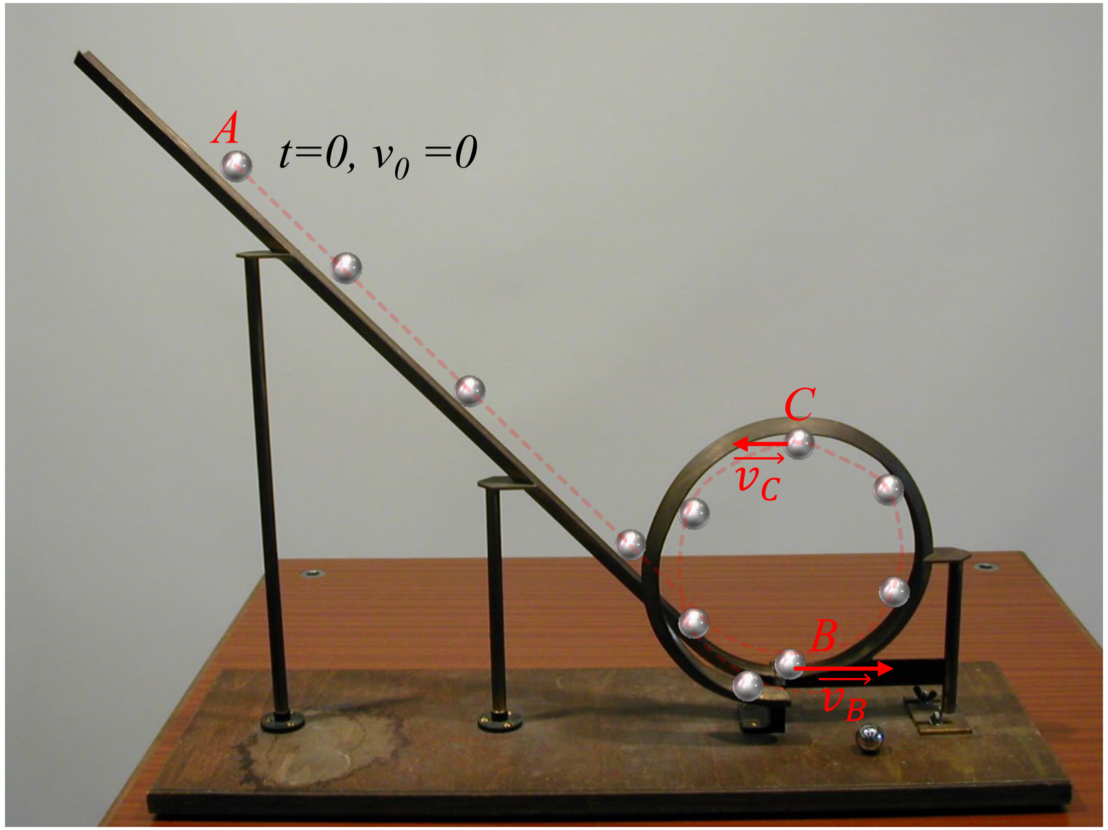
$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2gL} v_0^2$$

Finalement : $\boxed{\theta = \arccos\left(1 - \frac{1}{2gL} v_0^2\right)}$

6.6. Application de la conservation de l'énergie mécanique

■ Exemple 4 : hauteur h telle que la bille fasse un tour complet

Calcul de la hauteur h du lâché de la bille telle que celle-ci fasse le tour complet dans la glissière sans décrocher. La bille reste donc au contact avec la glissière tout au long du trajet (on néglige les frottements et la bille est un point matériel).



Etude du mouvement de la bille dans la boucle :

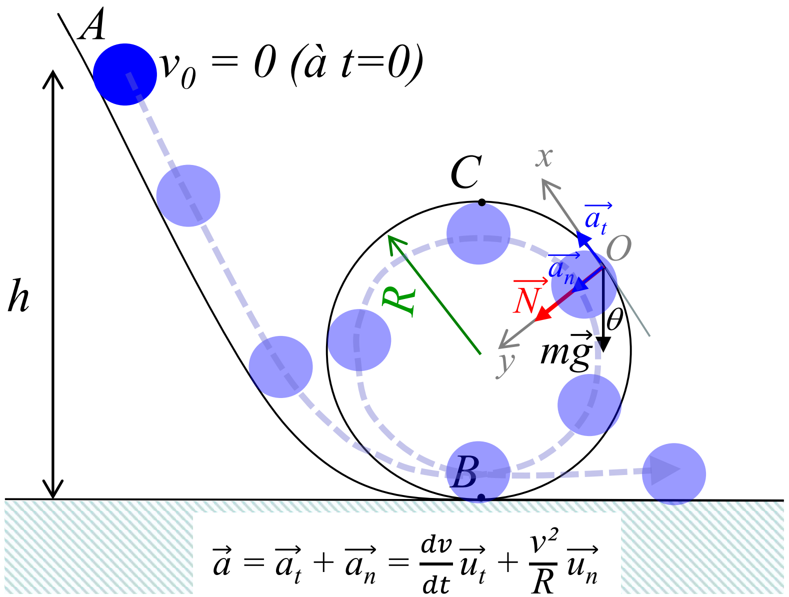
C'est un mouvement circulaire qui n'est pas uniforme car la vitesse varie entre B et C, et C et B.

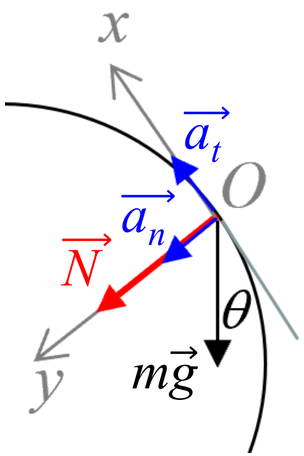
La vitesse diminue lorsque la bille monte en raison du champ de pesanteur.

La vitesse est minimum en C.

Si la bille décroche, la réaction du support devient nulle.

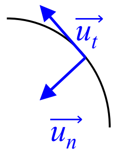
■ Exemple 4 : hauteur h telle que la bille fasse un tour complet





La force N *correspond à la réaction de la glissière sur la bille tant qu'il y a contact entre les deux. Dans ce cas, la glissière circulaire impose à la bille un changement de direction et génère ainsi une accélération centripète égale à* $\frac{v^2}{R}$.

a) Etude préliminaire du problème (dans repère de Frenet)



Forces extérieures : le poids et la réaction de la glissière

$$2^{nde} \text{ loi de Newton : } m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

$$\text{projection pour un angle } \theta \text{ donné } \begin{cases} Ox : ma_t = -mg\cos\theta + 0 \\ Oy : ma_n = mg\sin\theta + N \end{cases}$$

$$\text{Mouvement circulaire (imposé par la glissière) : } \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$$

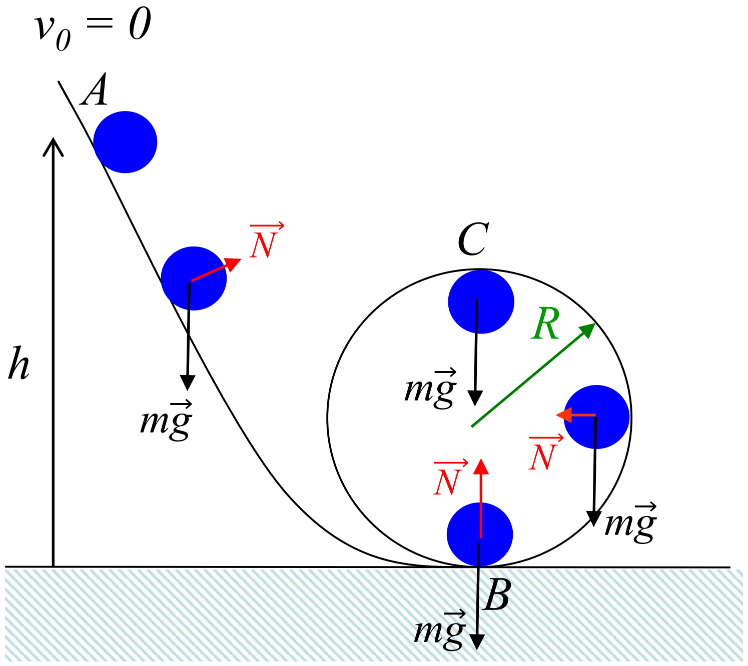
$$\text{d'où } m\frac{v^2}{R} = mg\sin\theta + N \Rightarrow N = m\frac{v^2}{R} - mg\sin\theta$$

On remarque que N diminue quand θ *augmente* ($\theta = -90°$ *en B). N est minimum pour* $\theta = 90°$ *(la vitesse v diminue avec* θ*)*

$$\text{soit en C } (\theta = 90°) \Rightarrow N_{min} = m\frac{v^2}{R} - mg$$

6.6. Application de la conservation de l'énergie mécanique

■ Exemple 4 : hauteur h telle que la bille fasse un tour complet



b) Condition de décrochage en C ?

Lorsque la bille décroche, il n'y a plus de réaction de la glissière. Dans ce cas, la force de réaction devient nulle d'où $N=0$. Ceci définie la condition de décrochage.

La réaction calculée au point a) est $N_{min} = m\, v^2/R - mg$

La condition $N_{min}=0$ conduit alors à $v = \sqrt{gR}$

c) Conservation de l'énergie mécanique

On prend l'énergie potentielle nulle au niveau du sol (h=0)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Au point } A :\ E_A = mgh \\ \text{Au point } C :\ E_C = mg(2R) + \tfrac{1}{2} mv^2\end{array}\right\} E_A = E_C$$

Soit $mgh = mg(2R) + \tfrac{1}{2}\, mgR$ avec $v = \sqrt{gR}$

et finalement $mgh = \frac{5}{2} mgR \Rightarrow \boxed{h = \frac{5}{2} R}$